Mathématiques S 2013

Exercice 4 (Spécialité)

1.

$$v_{n+1} = 0{,}95 \times v_n + 0{,}01 \times c_n$$
$$c_{n+1} = 0{,}05 \times v_n + 0{,}99 \times c_n$$

2.

$$AX = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}01 \\ 0{,}05 & 0{,}99 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95a + 0{,}01b \\ 0{,}05a + 0{,}99b \end{pmatrix}$$

On en conclut que

$$c = 0{,}95a + 0{,}01b$$
$$d = 0{,}05a + 0{,}99b$$

3. a.

$$PQ = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad et \quad QP = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

On remarque que $PQ = QP = 6I$

D'où P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{6}Q$

b.

$$P^{-1}AP = \frac{1}{6}Q \begin{pmatrix} 1 & -0{,}94 \\ 5 & 0{,}94 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}94 \end{pmatrix}$$

c. On peut faire une démonstration par récurrence

$$P_n \; la \; propriété : \; A^n = PD^nP^{-1}$$

Initialisation : $au \; rang \; 1 : PD^1P^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = A$ Donc propriété vraie au rang 1.

Hérédité : Supposons donc la propriété P_n vraie.

$$A^{n+1} = AA^{n+1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

Hérédité vérifiée.

© Nicolas RAYEZ

La propriété P_n *la propriété* : $A^n = PD^nP^{-1}$ est vraie pour $n \geq 1$

4. $\lim_{n\to+\infty} 0{,}94^n = 0$ car $0 < 0{,}94 < 1$

$$et\ donc \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{6}v_0 + \frac{1}{6}c_0 = 41667$$

A long terme, la population en ville tendra vers 41 667 habitants.

Soit 16,7 % de la population régionale et donc 83,3% pour la population en campagne.

© Nicolas RAYEZ