Exercice 1

PARTIE A

1. $f_1(0) = 0 + e^{-0} = 1$ Donc le point A appartient à $\mathcal{C}_1$
2. $f'_1(x) = 1 - e^{-x}$

Négatif pour $x \leq 0$ car $e^{-x} \geq 1$ pour $x \leq 0$

La limite en $+\infty$ est très simple, celle en $-\infty$ donne $+\infty$ par croissance comparée de l'exponentielle.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe $f'_1(x)$	$-$		$+$
Variations $f_1(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

PARTIE B

1. a) I_n est l'aire délimitée par les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}_n$

   b) La suite I_n semble décroissante car l'aire sous la courbe diminue.

   L'aire semble se rapprocher de l'aire d'un triangle rectangle isocèle valant

$$\frac{1\times1}{2} = \frac{1}{2}$$

2. $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \left(x + e^{-(n+1)x}\right) dx - \int_0^1 (x + e^{-nx}) dx$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \left(x + e^{-(n+1)x} - x - e^{-nx}\right) dx$$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (e^{-(n+1)x} - e^{-(n+1-1)x}) dx$$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x}(1 - e^{x}) dx$$